INTEGRALE

Wir üben einige der wesentlichen Techniken zum Ausrechnen von Integralen.

[P25] *Ohne große Rechnung*
Die folgenden Integrale können Sie ohne große Rechnung mit elementaren Tricks und Überlegungen bestimmen:

(a) $J_1 = \displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \Big(1 - |x-1|\Big)\,,$

(b) $J_2 = \displaystyle\int_1^3 \mathrm{d}x\, \frac{x(x-2)+2}{x^2-4x+6}\,,$

(c) $J_3 = \displaystyle\lim_{T\to\infty} \frac{6}{T} \int_0^T \mathrm{d}t\, \sin^2 \omega t\,,$

(d) $J_4 = \displaystyle\lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^{5\epsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\epsilon + \sin^3 x}\,,$

(e) $J_5 = 5a\,\partial_a \ln\Big(\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2/a^2}\Big)\,,$

(f) $J_6 = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-\gamma t} \cos \omega t\,.$

[P26] *Alle Wege führen nach Rom*
Das Integral $J_7 = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x\, \mathrm{e}^{-\alpha x}$ soll auf vier verschiedenen Wegen ausgerechnet werden, und zwar:

(a) Berechnen Sie $\partial_x \big(\alpha x\, \mathrm{e}^{-\alpha x}\big)$ und $\partial_x\, \mathrm{e}^{-\alpha x}$. Geben Sie damit die gesuchte Stammfunktion an.

(b) Berechnen Sie $J_8 = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\alpha x}$ und differenzieren Sie nach α.

(c) Verwenden Sie wieder J_8 und arbeiten mit partieller Integration.

(d) Betrachten Sie $J_9 = \displaystyle\lim_{\beta\to 0} \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{1}{\beta}\, \sin(\beta x)\, \mathrm{e}^{-\alpha x}$ und verwenden Sie die Euler-Formel.